

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix A^{-1} .

[1 punt]

b) Calculeu A^{-1} per a $a = 0$.

[1 punt]

2. A l'espai tridimensional considereu la recta $r: (x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ i els plans $\pi_1: x + y + z = -1$ i $\pi_2: (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π_2 .

[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta r que equidisten dels plans π_1 i π_2 .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval $[0, 2]$.

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval $[0, 2]$ i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

4. Siguin els plans de \mathbb{R}^3 $\pi_1: -y + z = 2$, $\pi_2: -2x + y + z = 1$ i $\pi_3: 2x - 2z = -1$.
- a) Calculeu la posició relativa dels tres plans.
[1 punt]
- b) Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 .
[1 punt]
5. Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.
- a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x , és donada per l'expressió
- $$S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}.$$
- [1 punt]
- b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.
[1 punt]
6. Trobeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[2 punts]

